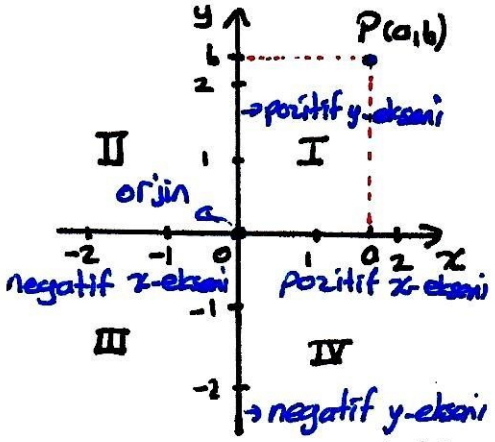
1 FONKSİYONLAR

1.1 Fonksiyonlar ve Grafikleri

Fonksiyonlar analiz çalışmalarının temelini oluşturur. Fonksiyonlar, gerçek dünyayı matematiksel terimlerle tanımlamak için kullanılan bir araçtır. Bir fonksiyon bir denklemle, bir grafikle, sayısal bir tabloyla veya sözlü bir açıklama ile temsil edilebilirler.

Bu bölümde fonksiyonların ne olduğunu, grafik olarak nasıl resmedildiklerini, nasıl birleştirilip, ötelendiklerini nasıl sınıflandırılabileceklerini ele alacağız. Bunun için önce koordinat sistemini hatırlatalım.

Düzlemde Kartezyen Koordinatlar



Düzlemin koordinat eksenleri birbirine dik iki doğrudur. Genelde yatay ve dikey çizilirler. Yatay koordinat ekseni x-ekseni ve dikey koordinat ekseni y-ekseni olarak adlandırılır. İki eksenin kesiştiği noktaya orjin denir. Düzlemde noktalar sıralı (a,b) çiftleri ile gösterilirler. a ve b sırasıyla x- ve y-eksenlerindeki sayısal değerlerdir.

Bu koordinat sistemine, dik (dikdörtgensel) koordinat sistemi veya kartezyen sistem denir. Koordinat eksenleri düzlemi dört bölgeye ayırır. I. dörttebir bölgede $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ dır, II. dörttebir bölgede $x \leq 0$ ve $y \geq 0$ dır, III. dörttebir bölgede $x \leq 0$ ve $y \leq 0$ dır, IV. dörttebir bölgede ise $x \geq 0$ ve $y \leq 0$ dır.

Fonksiyonlar; Tanım ve Görüntü Kümeleri

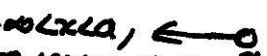
Tanım: Bir D kümesinden bir R kümesine giden bir fonksiyon D'deki her elemana R'de yalnız bir eleman karşılık getiren bir kuraldır.

D kümesine fonksiyonun tanım kümesi, R kümesine görüntü (değer) kümesi denir. D kümesindeki elemanlara bağımsız değişken karşı gelen elemanlara bağımlı değişkenler denir.

D kümesinden R kümesine giden bir f fonksiyonu $f: D \to R$ ile gösterilir ve sembolik olarak, Leonhard Euler kaşifi ile, $y=f(x)$ ile gösterilir.

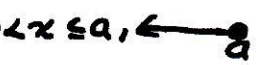
Bu ders boyunca aksi söylenmedikçe R ve D kümeleri $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alınacaktır. Daha çokta, aralıklardan oluşacaktır: Aralıklar açık, kapalı, yarı açık veya sonlu, sonsuz olabilir.

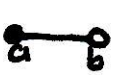
Açık aralık: (a,b), $a<x<b$,

(a,∞), $a<x<\infty$, , $(-\infty,a)$, $-\infty<x<a$, 

$(-\infty,\infty)$, $-\infty<x<\infty$,

Kapalı aralık: $[a,b]$, $a\le x\le b$,

$[a,\infty)$, $a\le x<b$, , $(-\infty,a]$, $-\infty<x\le a$, 

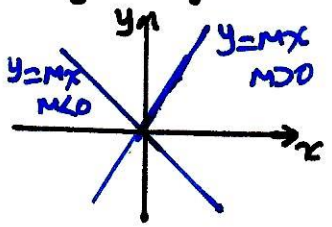
Yarı açık aralık: $[a,b)$, $a\le x<b$  , $(a,b]$, $a<x\le b$,

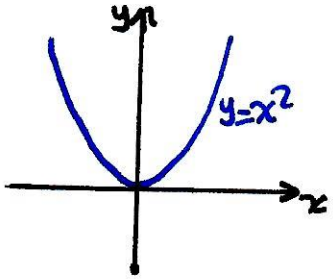
Örnek!

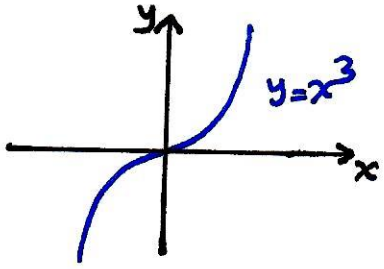
Fonksiyon	Tanım kümesi	Değer kümesi
$y=x^2$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$	$[0,\infty)$
$y=\frac{1}{x}$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)=\mathbb{R}-\{0\}$	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$y=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{4-x}$	$(-\infty,4]$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1]$

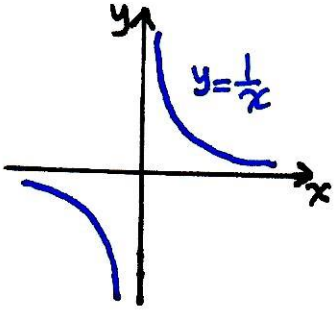
$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği, düzlemde $(x,y)=(x,f(x))$ noktalarının kümesidir. Küme notasyonu ile grafik $\{(x,f(x)) \mid x\in D\}$ dir. Bir fonksiyonun grafiği 4.4 bölümünde ayrıntıları ile anlatılacaktır. Bu bölümde, temel fonksiyonların kaboca grafiği çizilecektir.

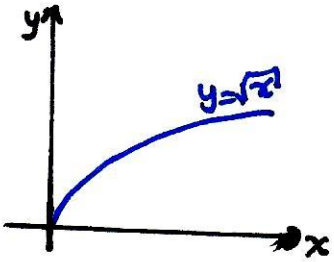
Verilen fonksiyonların değerleri hesaplandıktan sonra (x,y) noktaları düzlemde yerine konarak fonksiyonların grafikleri kabaca çizilecektir. 4.4 bölümüne kadar aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini bilmemiz gerekiyor:

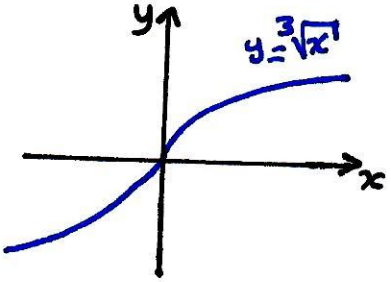


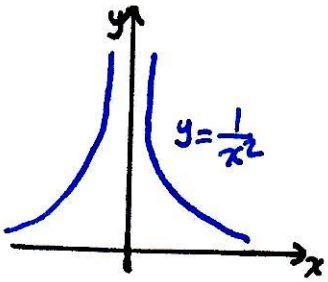


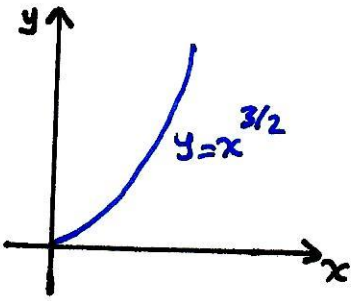


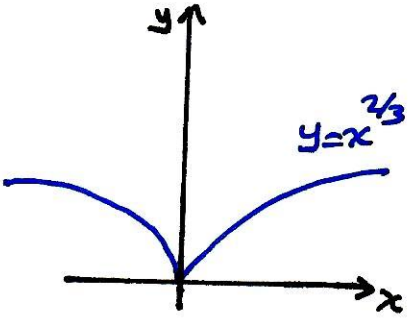












Tanım: $y=f(x)$ fonksiyonu, tanım kümesindeki her x için
$f(-x)=f(x)$ ise <u>çift fonksiyon</u>,
$f(-x)=-f(x)$ ise <u>tek fonksiyondur</u>.

Örnek: a) $f(x)=x^2$, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ olduğundan çift fonksiyondur.

b) $f(x)=x^3$, $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$ olduğundan tek fonksiyondur.

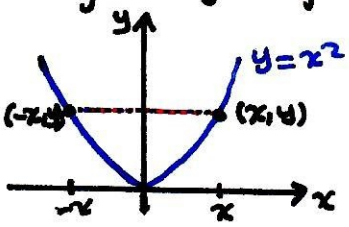
c) $f(x)=x^2+1$, $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$ old. çift fonksiyondur.

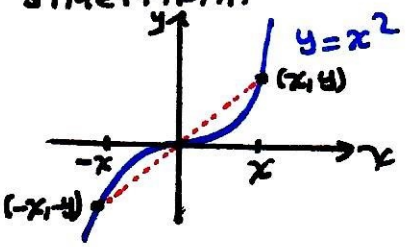
d) $f(x)=x^3+1$, $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1\neq f(x)$

$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1=-(x^3-1)\neq -f(x)$

olduğundan ne tek ne de çift fonksiyondur.

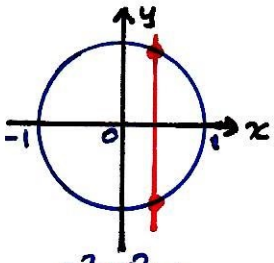
Bir çift fonksiyonun grafiği, y-eksenine göre simetriktir. Bir tek fonksiyonun grafiği orjine göre simetriktir.



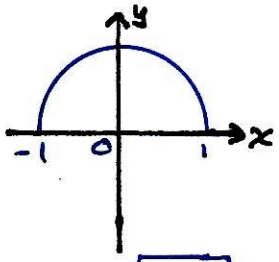


Bir Fonksiyon için Dikey Doğru Testi

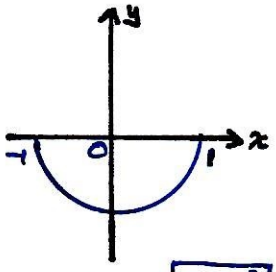
Koordinat düzlemindeki her eğri bir fonksiyonun grafiği olmayabilir. Bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her x için yalnız bir $f(x)$ değerine sahip olabilir. Bu yüzden, bir fonksiyonun grafiği, bir dikey doğruyu birden fazla noktada kesemez.



$x^2+y^2=1$



$y=\sqrt{1-x^2}$



$y=-\sqrt{1-x^2}$

Bir çember, bir fonksiyonun grafiği olamaz. Buna karşılık üst yarı çember $y=\sqrt{1-x^2}$, alt yarıçember $y=-\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun grafiğidir.

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Tanım: f fonksiyonu bir I aralığında tanımlı ve x_1, x_2, I'da herhangi iki nokta olsun.

1) $x_1<x_2$ iken $f(x_1)<f(x_2)$ ise f'ye I aralığında artan denir.
2) $x_1<x_2$ iken $f(x_2)<f(x_1)$ ise f'ye I aralığında azalan denir.

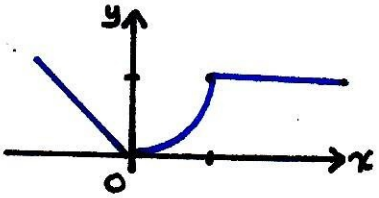
I aralığında artan veya azalan bir fonksiyona monotonik denir.

Örnek: $y=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun grafiğinde $[-1,0]$ aralığında artan, $[0,1]$ aralığında azalandır.

Parçalı Fonksiyonlar Tanım kümesinin farklı bölgelerinde, farklı kurallar ile tanımlanan fonksiyonlara, parçalı fonksiyonlar denir.

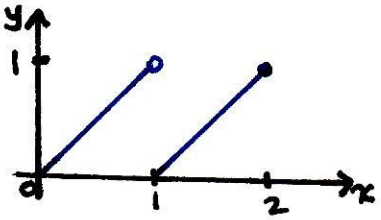
Örnek 1:

$$y=f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$



Örnek 2:

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ x-1, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

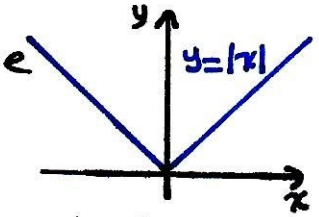


Mutlak Değer Fonksiyonu:

Mutlak değer fonksiyonu $y=|x|$ ile gösterilir ve

$$|x|=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır.



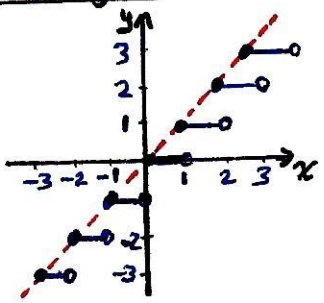
Mutlak değer fonksiyonu, $|-x|=|x|$ olduğundan, çift fonksiyondur.

1) $|-x|=|x|$ 2) $|xy|=|x||y|$ 3) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$ 4) $|x+y|\le|x|+|y|$ özelliklerini sağlar. $|x|=\sqrt{x^2}$.

Örnek: Herhangi bir x sayısındaki değeri, x'e eşit veya x'den küçük en büyük tamsayı olan fonksiyona, en büyük tamsayı fonksiyonu denir ve $\lfloor x\rfloor$ ile gösterilir.

$\lfloor 2.4\rfloor=2$, $\lfloor 2\rfloor=2$, $\lfloor 1.9\rfloor=1$, $\lfloor 0.3\rfloor=0$, $\lfloor 0\rfloor=0$

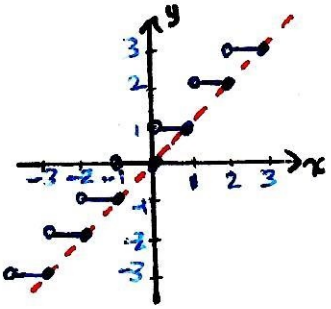
$\lfloor -1.2\rfloor=-2$, $\lfloor -2\rfloor=-2$, $\lfloor -0.3\rfloor=-1$.



Örnek: Herhangi bir x sayısındaki değeri, x'e eşit veya x'den büyük en küçük tamsayı olan fonksiyona, en küçük tamsayı fonksiyonu denir ve $\lceil x\rceil$ ile gösterilir.

$\lceil 2.4\rceil=3$, $\lceil 2\rceil=2$, $\lceil 1.9\rceil=2$, $\lceil 0.3\rceil=1$, $\lceil 0\rceil=0$

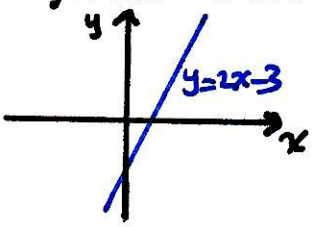
$\lceil -1.2\rceil=-1$, $\lceil -2\rceil=-2$, $\lceil -0.3\rceil=0$.



Yaygın Fonksiyonlar

Lineer Fonksiyonlar $f(x)=mx+n$ formundaki fonksiyonlara lineer fonksiyonlar denir.

Örneğin $f(x)=2x-3$ fonksiyonu lineerdir ve kartezyen düzlemde grafiği bir doğrudur.



Kuvvet Fonksiyonları a bir sabit olmak üzere $f(x)=x^a$ şeklindeki fonksiyonlara denir.

$f(x)=x^2$, $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=x^{3/2}=\sqrt{x^3}$ kuvvet fonksiyonlarına örnek fonksiyonlardır.

Polinomlar n negatif olmayan bir tamsayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılar (polinomun katsayıları denir) olmak üzere

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

formundaki p fonksiyonuna bir polinom denir. Bütün polinomların tanım kümesi $(-\infty,\infty)$ dur. n'ye polinomun derecesi denir. 2. dereceden polinomlara, $p(x)=ax^2+bx+c$, <u>kuadratik fonksiyonlar</u> denir. 3. dereceden, $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ polinomlara, <u>kübik fonksiyonlar</u> denir.

Rasyonel Fonksiyonlar p ve q polinomlar olmak üzere

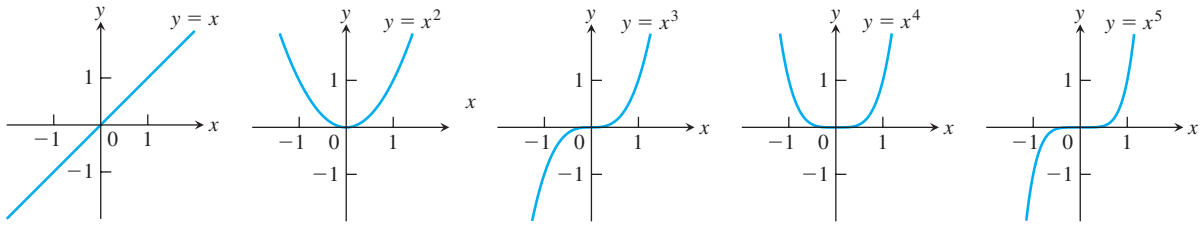
$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

şeklindeki iki polinomun oranına bir rasyonel fonksiyon denir.

örnek: $f(x)=\dfrac{3x^4+2x-1}{2x+3}$

Cebirsel Fonksiyonlar Cebirsel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kök alma) kullanılarak polinomlardan elde edilen fonksiyonlara cebirsel fonksiyonlar denir.

Üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, transandantal fonksiyonlar sırasıyla işlenmeye başlanacak.



Graphs of $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$, defined for $-\infty < x < \infty$.

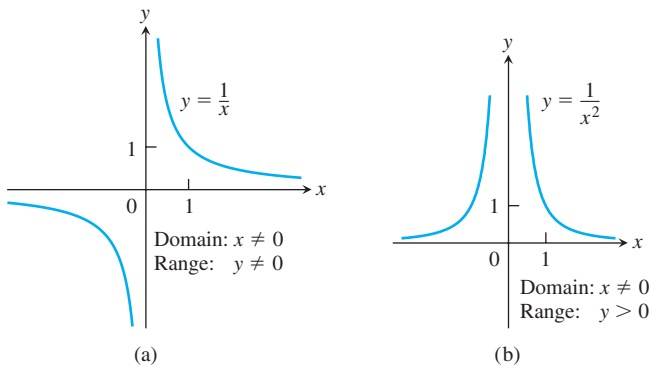
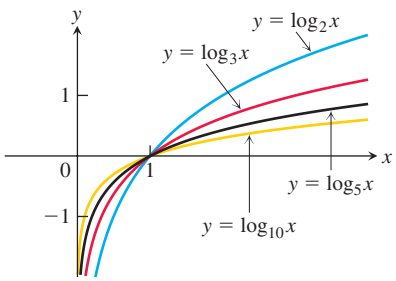
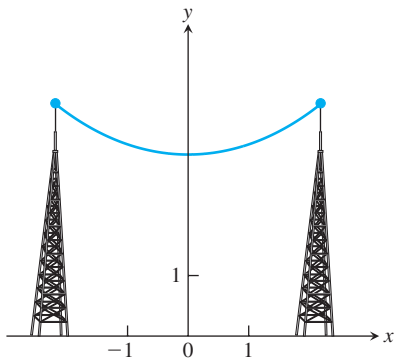


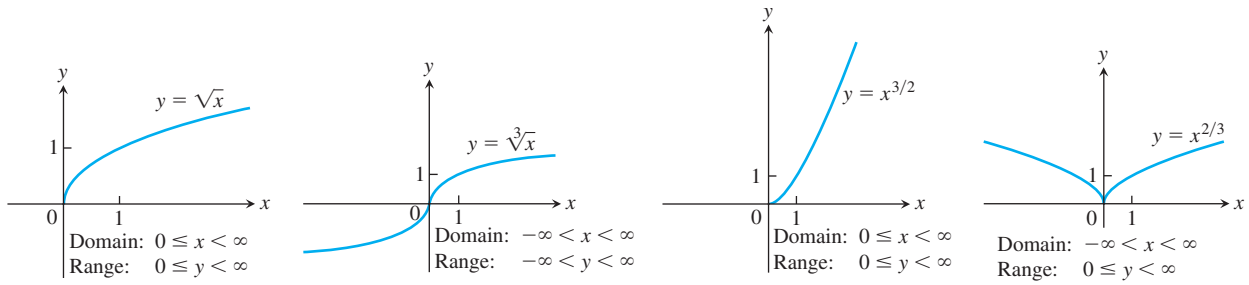
FIGURE 1.16 Graphs of the power functions $f(x) = x^a$ for part (a) $a = -1$ and for part (b) $a = -2$.



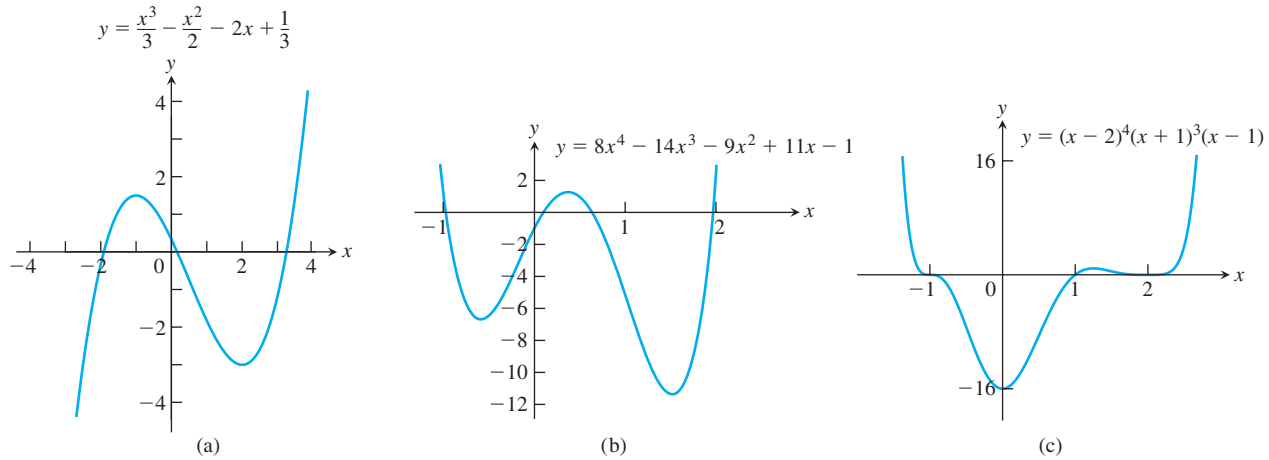
Graphs of four logarithmic functions.



Graph of a catenary or hanging cable. (The Latin word *catena* means "chain.")



Graphs of the power functions $f(x) = x^a$ for $a = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, and $\frac{2}{3}$.



Graphs of three polynomial functions.

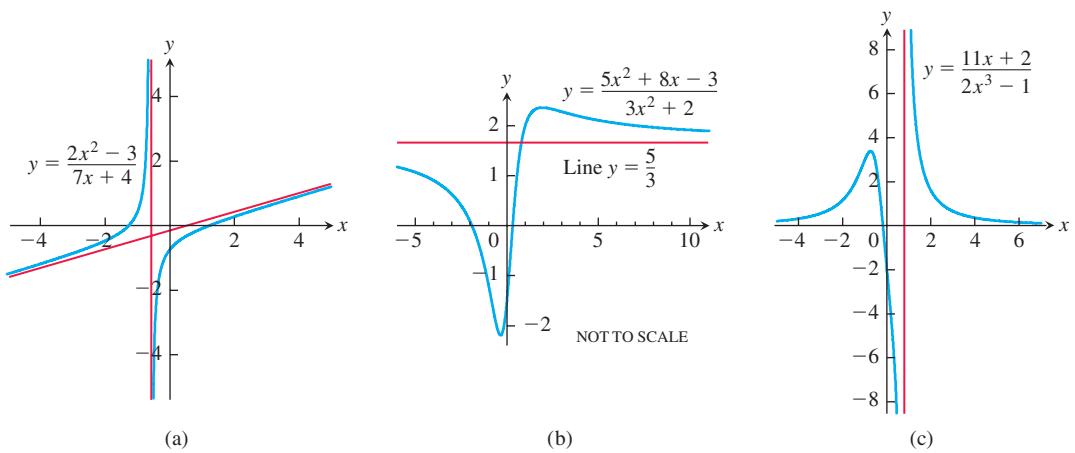
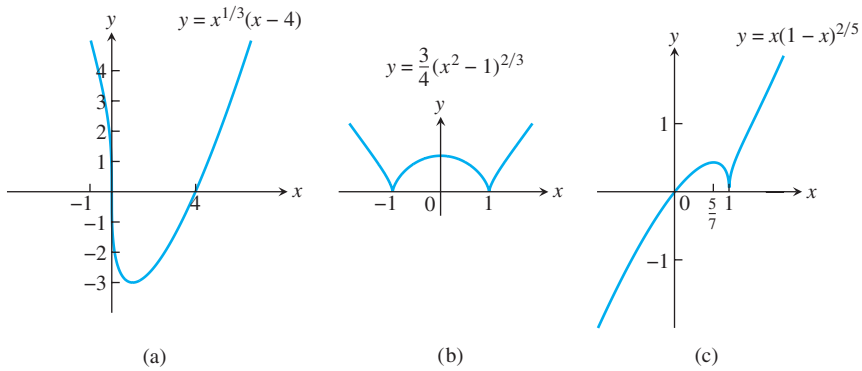
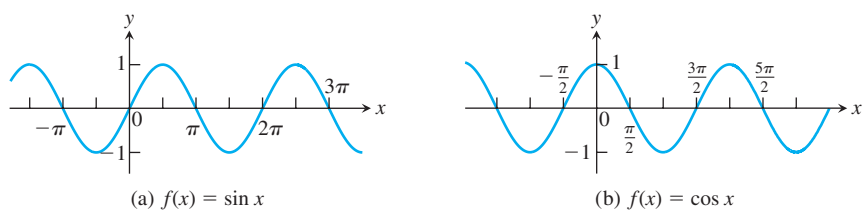


FIGURE 1.19 Graphs of three rational functions. The straight red lines approached by the graphs are called *asymptotes* and are not part of the graphs. We discuss asymptotes in Section 2.6.



Graphs of three algebraic functions.



Graphs of the sine and cosine functions.

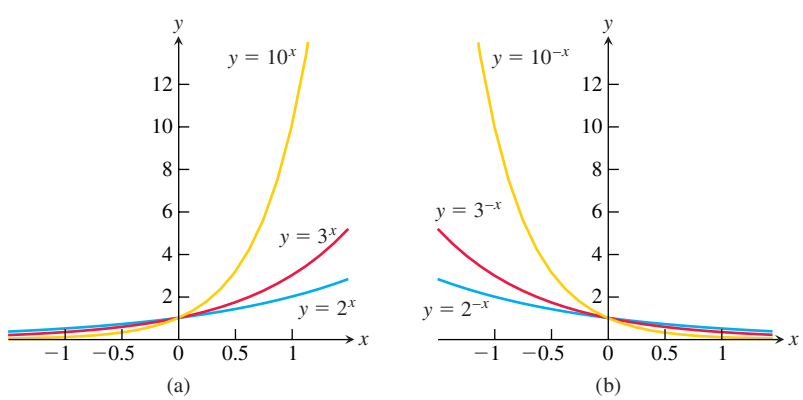


FIGURE 1.22 Graphs of exponential functions.

1.2 Fonksiyonların Birleştirilmesi; Grafiklerin Kaydırılması

Toplam, Fark, Çarpım ve Bölüm f ve g'nin uygun tanım kümelerinde $f+g$, $f-g$, fg ve $\frac{f}{g}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $\quad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$,

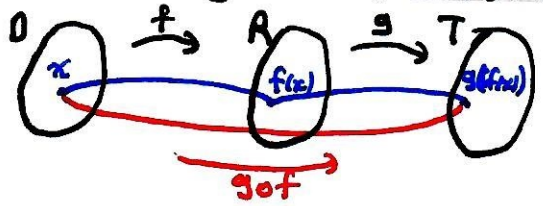
$(fg)(x)=f(x)g(x)$, $\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x)\neq 0$.

c sabit ile $(cf)(x)=cf(x)$ dir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=\sqrt{1-x}$ fonksiyonları $D(f)=[0,\infty)$ ve $D(g)=(-\infty,1]$ tanım kümelerine sahiptir. İki fonksiyonun ortak tanım kümesi $D(f)\cap D(g)=[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$ dir.

Fonksiyon	Formül	Tanım kümesi
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	"
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	"
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	"
f/g	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$
g/f	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$

Bileşke Fonksiyonlar $f: D\to R$, $g: R\to T$ fonksiyonlar ise f ve g'ye bağlı olarak D'den T'ye yeni bir fonksiyon tanımlayabiliriz. Bu yeni fonksiyonu, $g(f(x))$ olarak tanımlıyoruz ve $g\circ f$ ile gösteriyoruz. Buna g ve f'in bileşke fonksiyonu denir.



$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

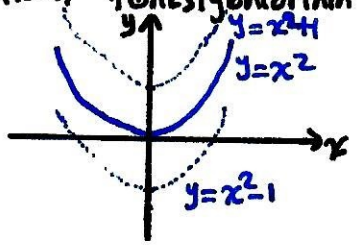
Örnek: $f(x)=2x-3$ $\qquad g(x)=x^2+1$

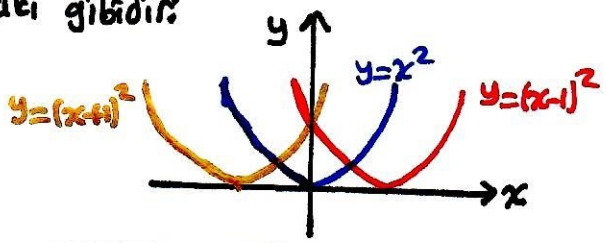
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(2x-3)^2+1=4x^2-12x+10$ $\qquad (f\circ f)(x)=?$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2+1)-3=2x^2-1$ $\qquad (g\circ g)(x)=?$

Bir Grafiğin Ötelenmesi

$y=x^2$ fonksiyonunun grafiğini biliyoruz. $y=x^2+1$, $y=x^2-1$, $y=(x+1)^2$ ve $y=(x-1)^2$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir:



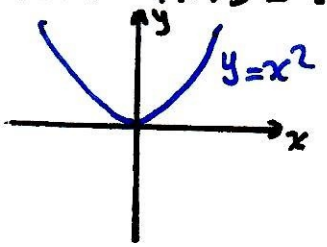


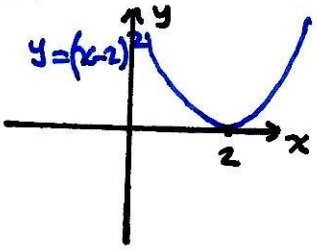
$y=f(x)+k$ — $k>0$ ise grafiği k birim yukarı öteler; $k<0$ ise " $|k|$ " aşağı "

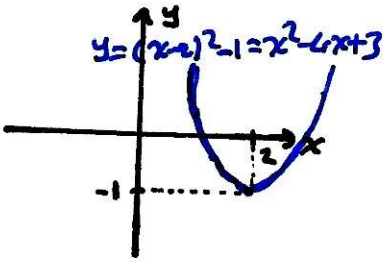
$y=f(x+h)$ — $h>0$ ise grafiği h birim sola öteler; $h<0$ ise " $|h|$ " sağa öteler

Örnek: $f(x)=x^2-4x+3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$







Dikey ve Yatay Ölçeklendirme ve Yansıtma Formülleri

$c>1$ için:

$y=cf(x)$ — f fonksiyonunun grafiğini c çarpanı kadar dikey uzatır.

$y=\frac{1}{c}f(x)$ — f'nin grafiğini c çarpanı kadar dikey sıkıştırır.

$y=f(cx)$ — " " " " " yatay "

$y=f(c/x)$ — " " " " " " uzatır.

$c=-1$ için:

$y=-f(x)$ — f'nin grafiğini x-ekseni boyunca yansıtır.

$y=f(-x)$ — " " y-ekseni " "

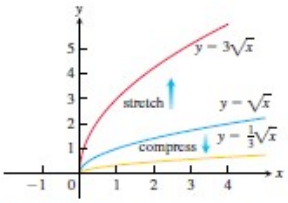


FIGURE 1.32 Vertically stretching and compressing the graph $y=\sqrt{x}$ by a factor of 3 (Example 4a).

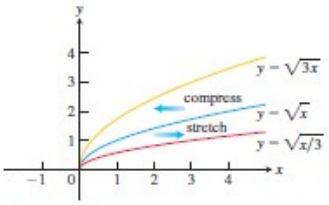


FIGURE 1.33 Horizontally stretching and compressing the graph $y=\sqrt{x}$ by a factor of 3 (Example 4b).

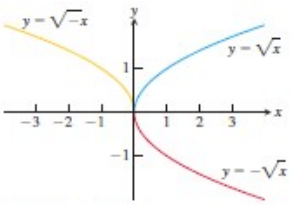


FIGURE 1.34 Reflections of the graph $y=\sqrt{x}$ across the coordinate axes (Example 4c).

Örnek: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonu veriliyor.

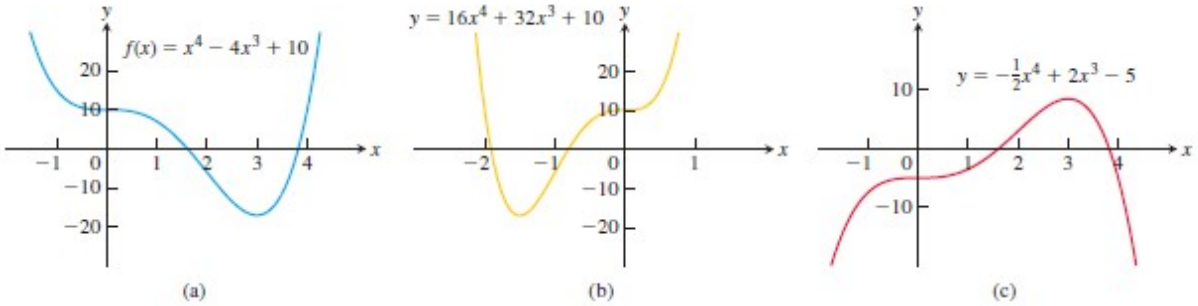
a) f'nin grafiğini yatay olarak 2 kat sıkıştıracak ve ardından y-eksoni boyunca yansıma yapacak formülü bulun?

x'i 2 ile çarparsak yatay sıkıştırma, -1 ile çarparsak y-ekseni boyunca yansıma elde ederiz. Bu durumda fonksiyonda x yerine -2x yazmamız yeterli olacaktır.

$$y = f(-2x) = (-2x)^4 - 4(-2x)^3 + 10 = 16x^4 + 32x^3 + 10.$$

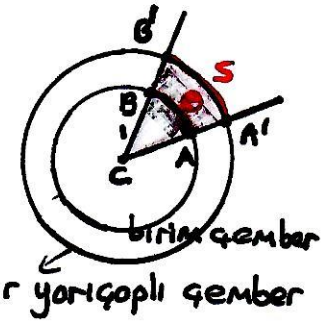
b) f'nin grafiğini dikey olarak 2 kat sıkıştıracak ve ardından x-eksoni boyunca yansıma yapacak formülü bulunuz?

$$y = -\frac{1}{2} f(x) = -\frac{1}{2} x^4 + 2x^3 + 5.$$



1.3 Trigonometrik Fonksiyonlar

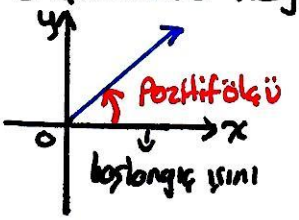
Radyan Ölçüsü Deniz yolculuğunda, astronomide açılar, dereceyle ölçülür. Fakat matematikte, daha kolay hesaplanmalarından dolayı radyan ölçüsü kullanılır.

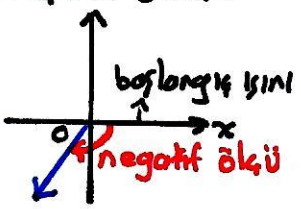


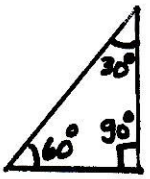
Birim çember merkezli $A\hat{C}B$ açısının radyan ölçüsü ACB'nin birim çemberden kestiği yayın uzunluğuna eşittir. r yarıçaplı bir çemberde, radyan ölçüsü ile verilen θ açısına göre, $s = r\theta$ dır.

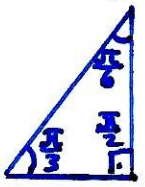
Birim çemberin çevresi 2π olduğundan ve 360° ile çevresi tamamlandığından π radyan = 180° derecedir. Dolayısıyla, örneğin 45° radyan olarak $45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad dır, $\frac{\pi}{6}$ radyan ise $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30°$ dir.

xy- düzleminde bir açı, köşesi orjindeyse standard pozisyondadır denir ve onun başlangıç ışını pozitif x-eksenidir. Pozitif x-ekseninden saat yönü tersine ölçülen açılara pozitif ölçülü, saat yönünde ölçülenlere negatif ölçülü denir.

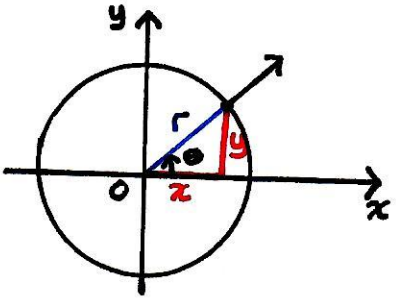








Altı Temel Trigonometrik Fonksiyon



Bir dik üçgenin kenarlarının terimleriyle, bir dar açının trigonometrik fonksiyonlarının tanımını birçoğunuz biliyorsunuzdur. r yarıçaplı bir çemberin merkezindeki açıyla bu tanımı, geniş açıya ve negatif açıya genişletebiliriz. Altı temel trigonometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

sinüs : $\sin\theta = \frac{y}{r}$

kosinüs : $\cos\theta = \frac{x}{r}$

tanjant : $\tan\theta = \frac{y}{x}$

kosekant : $\csc\theta = \frac{r}{y}$

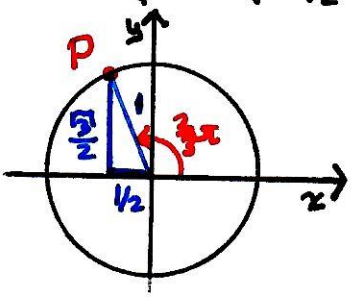
sekant : $\sec\theta = \frac{r}{x}$

kotanjant : $\cot\theta = \frac{x}{y}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$x=0$ ise yani $\theta, \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$ olduğunda $\tan\theta$ ve $\sec\theta$ tanımlı değildir. Benzer şekilde $y=0$ $(\theta, 0, \pm\pi, \dots)$ ise $\cot\theta$ ve $\csc\theta$ tanımlı değildir. Bazı değerler:

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$,



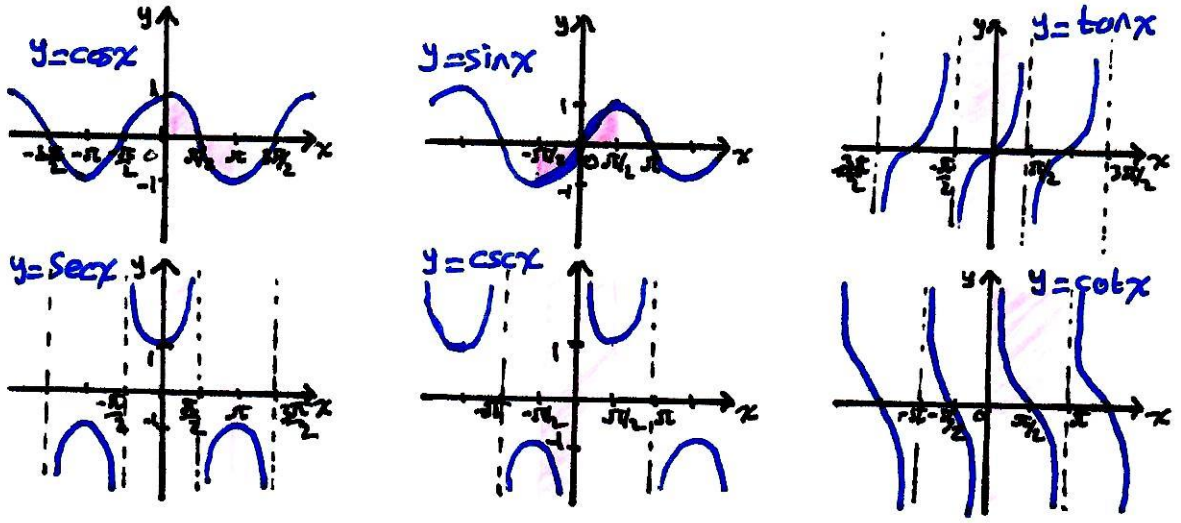
$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

$P\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Tanım! x'in her değeri için $f(x+p) = f(x)$ şartını sağlayan bir pozitif p sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna <u>periyodik</u> denir. Bu şartı sağlayan en küçük p sayısına fonksiyonun <u>periyodu</u> denir.

$\cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta+4\pi) = \dots = \cos\theta$ en küçüğü 2π olduğundan, $\cos\theta$ 2π periyodludur. $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\tan\theta$ 2π periyodlu, $\tan\theta$ ve $\cot\theta$ π periyodludur. Grafikleri aşağıdaki gibidir:



Trigonometrik fonksiyonların tersini bulurken kullandığımız esas alınılıklar kırmızı ile toranmıştır.

$\cos(-x) = \cos x$ ve $\sec(-x) = \sec x$ olduğundan çift,

$\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\csc(-x) = -\csc x$ ve $\cot(-x) = -\cot x$ olduğundan tek fonksiyonlardır.

Özdeşlikler

Düzlemde herhangibir $P(x,y)$ noktasının koordinatlarını orjinden r uzaklığı ve pozitif x-ekseni ile OP ışınının yaptığı θ açısı cinsinden yazabiliriz. $\frac{x}{r}=\cos\theta$ ve $\frac{y}{r}=\sin\theta$ olduğundan

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

dır. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$ dir.

$$\boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad , \quad 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta \quad , \quad 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta}$$

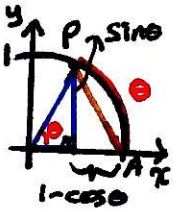
$$\boxed{\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta & \cos^2\theta&=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\\ \sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta&=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\end{aligned}}$$

Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin kenarları a, b, c ve c'nin karşısındaki açı θ ise

$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

dır. (kosinüs kuralı).



$$\boxed{-|\theta|\le\sin\theta\le|\theta| \quad \text{ve} \quad -|\theta|\le 1-\cos\theta\le|\theta|.}$$

$$[\ \sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2=(AP)^2<\theta^2\ ]$$

TABLE 1.2 Values of $\sin\theta$, $\cos\theta$, and $\tan\theta$ for selected values of θ

Degrees	-180	-135	-90	-45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0